Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ШЕРВАТОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1954

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 16

В. Г. ШЕРВАТОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

11-3-1

В. Г. Шерватов, Гиперболические функции

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов* Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 23/VI 1954 г. Подписано к печати 25/VIII 1954 г. Бумага 84×108¹/₃₂
Физ. печ. л. 1,43. Условн. печ. л. 2,88. Уч.-изд. л. 2,65. Тираж 25 000 экз. Т-05443
Цена книги 80 к. Заказ № 1528.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, Б. Калужская, 15

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая брошюра содержит элементарное изложение теории так называемых «гиперболических функций», во многом аналогичных обыкновенным тригонометрическим функциям. Гиперболические функции часто встречаются в разнообразных физических и технических исследованиях; весьма важную роль играют они также в неевклидовой геометрии Лобачевского, участвуя во всех тригонометрических зависимостях этой геометрии (см., например, книгу А. П. Нордена «Элементарное введение в геометрию Лобачевского», М., Гостехиздат, 1953; по содержанию глава IX этой книги близка к настоящей брошюре). Но и независимо от этих приложений теория гиперболических функций может представлять значительный интерес для школьника и учителя средней школы, так как аналогия между гиперболическими и тригонометрическими функциями по-новому освещает многие вопросы тригонометрии.

Брошюра состоит из трех глав. Первая глава посвящена гиперболическому повороту и его применению к изучению свойств гиперболы; она может представлять и известный самостоятельный интерес. Основное место занимает глава II, в которой излагаются элементы теории гиперболических функций. Глава III тесно связана с брошюрой А. И. Маркушевича «Площади и логарифмы», составляющей вып. 9 «Популярных лекций по математике»; она устанавливает связь теории гиперболических функций с теорией логарифмов.

Иное построение теории гиперболических функций, не использующее гиперболического поворота, содержится в статье Д. И. Перепелкина «Геометрическая теория гиперболических функций», напечатанной в вып. 2 сборника «Математическое просвещение», ОНТИ, М.—Л., 1934; к сожалению, в настоящее время этот сборник представляет собой библиографическую

редкость. Читателю брошюры можно порекомендовать также книгу Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова «Аналитическая геометрия», ч. 1, Гостехиздат, М. — Л., 1948, где содержится обширный материал, примыкающий к изложенному в первой главе.

Брошюра рассчитана на участников и руководителей школьных математических кружков; она может быть также использована и в работе вузовских кружков по математике. Мелким шрифтом в главе III напечатан более трудный материал, не рассчитанный на школьника. Впрочем, нигде у читателя не предполагается никаких знаний, выходящих за пределы курса средней школы.

Автор выражает искреннюю признательность И. М. Яглому, помощь и указания которого сыграли значительную роль при написании брошюры.

В. Г. Шерватов.

ГЛАВА I

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПОВОРОТ

§ 1. Сжатие к прямой

Часто при решении геометрических задач на построение применяется преобразование сжатия к точке (это преобразование называется также гомотетией или центрально-подобным преобразованием). Сжатие к точке

а)

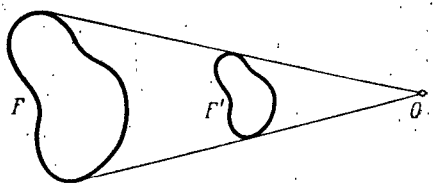
б)

Черт. 1.

O (называемой центром сжатия) с коэффициентом сжатия k состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A', которая лежит на луче OA, причем $\frac{OA'}{OA} = k$, т. е. $OA' = k \cdot OA$ (черт. 1, *а*, *б*). Если коэффициент сжатия k больше 1, то $OA' > OA$ (черт. 1, *б*); в этом случае преобразование следовало бы называть «расширением от O». Сама точка O при сжатии к O остается на месте.

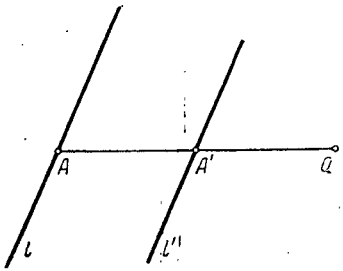
Всякая фигура F переходит при сжатии к точке O в фигуру F', подобную первоначальной с центром подобия O и коэффициентом подобия k (черт. 2). Если $k < 1$, то фигура при этом уменьшается, а если $k > 1$, фигура увеличивается.

Всякая прямая при сжатии к точке переходит в прямую (черт. 3а); параллельные прямые переходят в параллельные (черт. 3б). Всякая окружность при сжатии к точке переходит в окружность (черт. 3в).

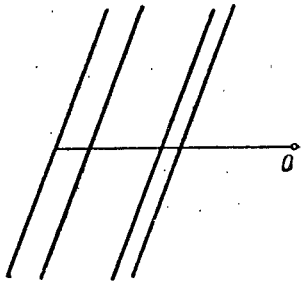


Черт. 2.

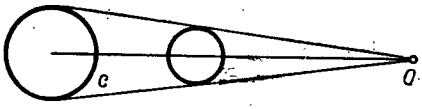
Все отрезки плоскости при сжатии к точке уменьшаются (или увеличиваются) в постоянном отношении k. Площади всех фигур тоже уменьшаются (или увеличиваются) в постоян-



Черт. 3а.



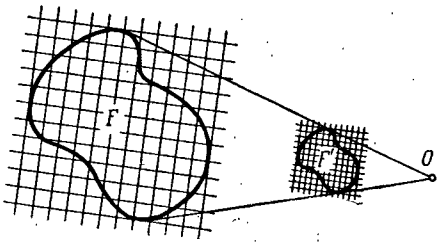
Черт. 3б.



Черт. 3в.

ном отношении, равном k^2 — квадрату коэффициента сжатия. Действительно, пусть F есть плоская фигура. Рассмотрим еще какую-то сеть мелких квадратов плоскости (черт. 4). Площадь F приближенно равна числу квадратов, попавших внутрь F, умноженному на площадь квадрата; ошибка будет тем меньше, чем мельче квадраты сетки. Выбирая квадраты достаточно малыми, можно сделать ошибку меньше любого (сколь угодно малого!) числа σ. При сжатии к точке сеть квадратов переходит в но-

вую сеть квадратов, а фигура F — в фигуру F', внутри которой будет заключаться столько же квадратов новой сети (более мелких, если $k < 1$, и более крупных, если $k > 1$), сколько квадратов первоначальной сети помещалось внутри F. Площадь F' приближенно равна числу заключеиных внутри нее квадратов, умноженных на площадь квадрата. Но площадь каждого нового квадрата равна площади первоначаль-

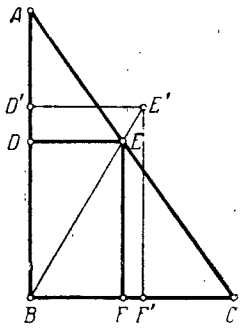


Черт. 4.

ного квадрата, умноженной на k^2 (так как длина стороны квадрата умножается на k). Поэтому площадь F' будет равна площади F, умноженной на k^2.

В качестве примера применения сжатия к точке разберем решение следующей задачи на построение: *вписать в данный прямоугольный треугольник ABC прямоугольник BDEF с данным отношением сторон* (черт. 5).

Построим сначала произвольный прямоугольник $BD'E'F'$ с данным отношением сторон так, чтобы вершины D' и F' лежали соответственно на сторонах AB и BC. Обозначим через E точку пересечения луча BE' и стороны AC треугольника. Легко видеть, что сжатие с центром B и коэффициентом сжатия $k = \dfrac{BE}{BE'}$ переводит прямоугольник $BD'E'F'$ в искомый прямоугольник $BDEF$. Пользуясь этим, легко построить этот прямоугольник [1]).

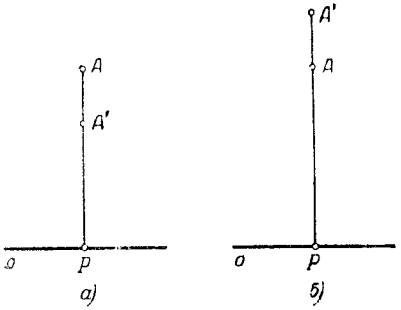


Черт. 5.

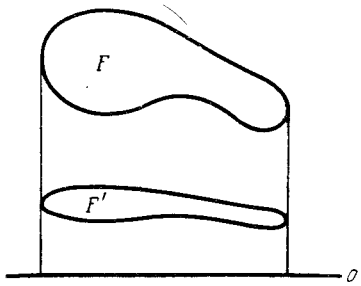
Иногда в геометрии оказывается удобным применить другое преобразование — сжатие к прямой. Сжатие к прямой o (называемой осью сжатия) с коэффициентом сжатия k

[1]) Авалогично можно решать задачу и в том случае, когда данный треугольиик ABC — не прямоугольный. Мы на этом не останавливаемся.

состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A', которая лежит на луче PA, перпендикулярном к o, причем $\frac{PA'}{PA} = k$ или $PA' = k \cdot PA$ (черт. 6 *а*, *б*). Если коэффициент сжатия k больше 1, то $PA' > PA$ (черт. 6, *б*); в этом случае преобразование следовало бы называть «расширением от o». Все точки прямой o при сжатии к o остаются на месте.



Черт. 6.



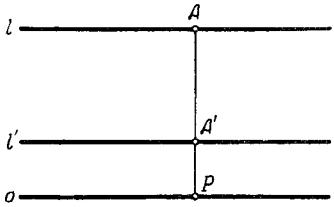
Черт. 7.

При сжатии к прямой фигура F переходит в новую фигуру F', уже не подобную F (черт. 7).

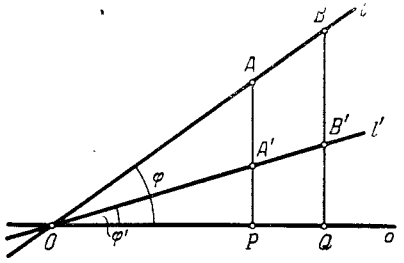
Сжатие к прямой обладает рядом свойств, аналогичных свойствам сжатия к точке. А именно:

а) *При сжатии к прямой всякая прямая переходит в прямую.*

Если прямая l параллельна o и отстоит от нее на расстоянии d, то она переходит в прямую l', тоже параллельную o и отстоящую от нее на расстоянии kd (черт. 8а).



Черт. 8а.



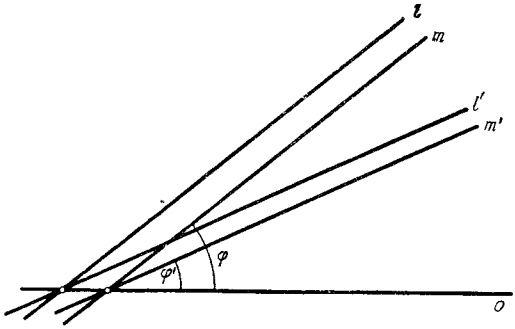
Черт. 8б.

Пусть l не параллельна o; точку пересечения l и o обозначим через O (черт. 8б). При сжатии к прямой o точка O остается на месте. Пусть A — произвольная точка прямой l

(отличная от O), A' — точка, в которую переходит A при сжатии к o; $PA' = k \cdot PA$. Возьмем на прямой l другую точку B; если B' есть точка пересечения перпендикуляра BQ, опущенного из B на прямую o, с прямой OA', то $\frac{B'Q}{BQ} = \frac{A'P}{AP} = k$ (следует из подобия треугольников OQB и OPA, OQB' и OPA') или $QB' = k \cdot QB$. Отсюда видно, что при сжатии к o точка B переходит в точку B'. Так как B — произвольная точка прямой l, то эта прямая при сжатии к o переходит в прямую OA' (которую естественно обозначать через l').

б) *При сжатии к прямой параллельные прямые переходят в параллельные.*

Пусть прямые l и m параллельны; тогда они не имеют общей точки. Но в таком случае и прямые l' и m', в которые переходят первоначальные прямые, тоже не имеют общей



Черт. 9.

точки (которая могла бы получиться только из общей точки прямых l и m); значит, эти прямые тоже параллельны (черт. 9)[1]).

в) *При сжатии к прямой сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой.*

---

[1]) Если φ и φ' — углы, образованные исходной прямой l и преобразованной прямой l' с осью сжатия o, то из черт. 8б легко следует:

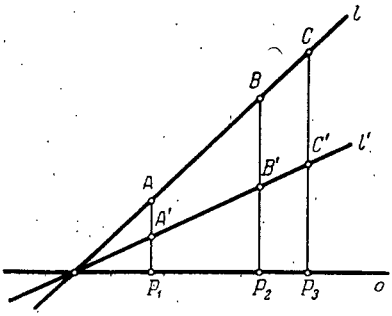
$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{PA'}{PO} = \frac{k \cdot PA}{PO} = k\frac{PA}{PO} = k \operatorname{tg}\varphi.$$

Отсюда также следует, что параллельные прямые, пересекающие o под одинаковым углом φ, переходят в параллельные прямые (пересекающие o под одинаковым углом φ').

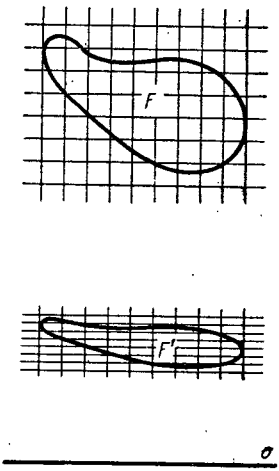
Действительно, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ по свойству параллельных прямых, пересекающих лучи пучка (черт. 10).

г) *При сжатии к прямой площади всех фигур изменяются в постоянном отношении* (равном коэффициенту сжатия k).

Рассмотрим фигуру F и сетку из мелких квадратов; тогда площадь F приближенно равна числу квадратов, заключенных внутри F, умноженному на площадь квадрата (черт. 11).

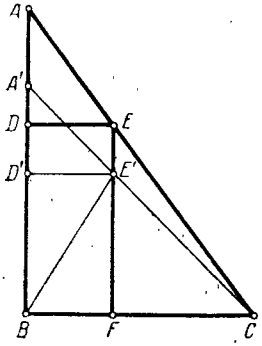


Черт. 10.



Черт. 11.

Будем считать, что одно из направлений линий сетки параллельно оси сжатия. При сжатии сетка квадратов перейдет в сетку равных прямоугольников, площадь каждого из которых равна площади квадрата, умноженной на k (одна сторона квадрата остается неизменной, а длина второй умножается на k). Далее рассуждение не отличается от доказательства того, что при сжатии к точке с коэффициентом k все площади изменяются в k^2 раз (см. выше, стр. 6—7).



Черт. 12.

В качестве примера использования сжатия к прямой разберем решение следующей задачи на построение [1]): *вписать в данный прямоугольный треугольник ABC прямоугольник BDEF*

[1]) Сравните с задачей на стр. 7.

с данным произведением сторон $BD \cdot BF = d^2$ (т. е. *прямоугольник данной площади*) (черт. 12). Для решения сожмем треугольник ABC к стороне BC с коэффициентом сжатия $k = \frac{BC}{BA}$; тогда этот треугольник перейдет в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'BC$, в котором $BA' = k \cdot BA = \frac{BC}{BA} \cdot BA = BC$ и площадь которого равна kS (где S — площадь треугольника ABC). Прямоугольник $BDEF$ перейдет при этом сжатии в прямоугольник $BD'E'F$ площади kd^2 (в силу свойства г)). Теперь нам нужно в равнобедренный прямоугольный треугольник $A'BC$ вписать прямоугольник $BD'E'F$ известной площади kd^2.

Это сделать нетрудно, ибо

$$S_{BFE'D'} = S_{\triangle BCA'} - (S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'})$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = S_{\triangle BCA'} - S_{BFE'D'} = kS - kd^2.$$

Но, с другой стороны,

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = \frac{1}{2} FE'^2 + \frac{1}{2} D'E'^2 = \frac{1}{2}(FE'^2 + D'E'^2) = \frac{1}{2} BE'^2$$

(здесь используется то, что треугольник $A'BC$, а следовательно, и подобные ему треугольники $A'D'E'$ и $E'FC$ — равнобедренные). Таким образом, мы получим:

$$\frac{1}{2} BE'^2 = kS - kd^2.$$

Теперь, зная длину отрезка BE', мы без труда найдем точку E', после чего сразу строится прямоугольник $BD'E'F$, вписанный в треугольник $A'BC$, и прямоугольник $BDEF$, вписанный в треугольник ABC.

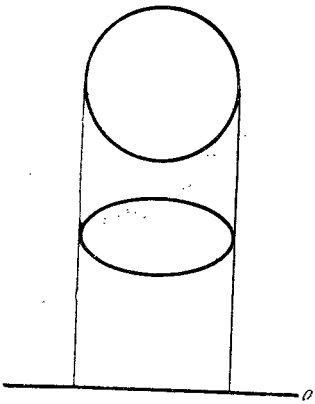
В зависимости от величины d задача может иметь два, одно или ни одного решения.

Геометрическое решение этой задачи, не использующее сжатия к прямой, неизвестно [1]).

---

[1]) Аналогично можно решить задачу и в том случае, когда данный треугольник ABC не прямоугольный. Мы на этом не останавливаемся.

В противоположность сжатию к точке сжатие к прямой не переводит окружность в окружность. Окружность переходит при сжатии к прямой в иную кривую, называемую эллипсом (черт. 13). Используя свойства а) — г) преобразования сжатия к прямой, можно вывести ряд геометрических свойств эллипса; однако это выходит за рамки настоящей брошюры.



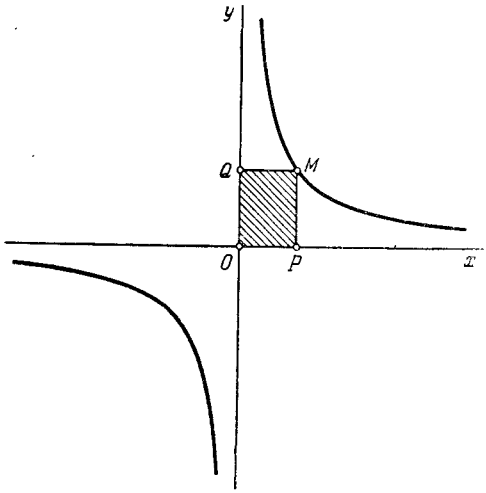
Черт. 13.

§ 2. Гиперболический поворот

В дальнейшем изложении большую роль будет играть график обратной пропорциональной зависимости, т. е. кривая, уравнение которой имеет вид:

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{или} \quad xy = a.$$

Эта кривая называется гиперболой. Она изображена на черт. 14.



Черт. 14.

Очевидно, что чем больше по абсолютной величине x, тем меньше y, и наоборот: если $x \to \infty$, то $y \to 0$, если $y \to \infty$, то $x \to 0$. Геометрически это означает, что гипер-

бола неограниченно приближается к координатным осям, никогда с ними не пересекаясь (из уравнения $xy = a$ следует, что ни x, ни y не могут равняться нулю).

Прямая, к которой некоторая кривая неограниченно приближается, не достигая ее, называется асимптотой этой кривой. Таким образом, оси координат являются асимптотами гиперболы.

Гипербола состоит из двух ветвей, которые при $a > 0$ расположены в I квадранте системы координат (x и y положительны) и в III квадранте (x и y отрицательны).

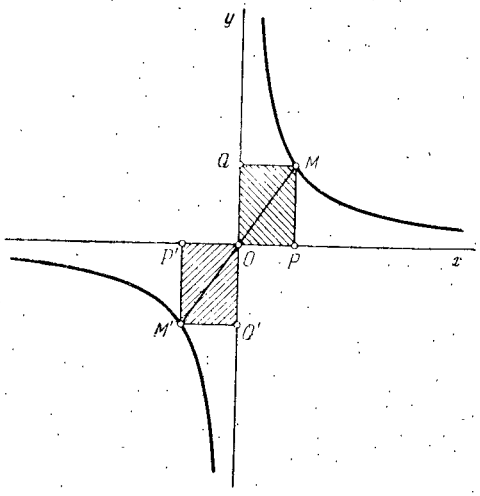
Уравнение $xy = a$ имеет простой геометрический смысл: площадь прямоугольника $MQOP$, ограниченного осями координат и прямыми, проведенными через какую-либо точку M гиперболы параллельно осям координат (черт. 14), равна a, т. е. не зависит от выбора точки M. Действительно, очевидно, $OP = x$, $PM = y$ и

$$S_{MQOP} = OP \cdot PM = x \cdot y = a.$$

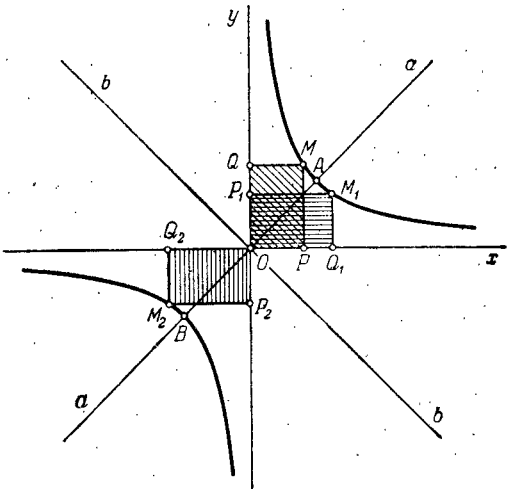
Если назвать прямоугольник $MQOP$ координатным прямоугольником точки M, то можно сказать, что *гипербола есть геометрическое место точек, лежащих в* I *и в* III *квадрантах системы координат, координатные прямоугольники которых имеют постоянную площадь.*

Гипербола имеет центр симметрии: обе ветви гиперболы симметричны друг другу относительно начала координат O. Доказательство этого утверждения следует из того, что симметричные относительно O координатные прямоугольники $MQOP$ и $M'Q'OP'$ (черт. 15) имеют равные площади. Гипербола имеет также две оси симметрии, которыми служат биссектрисы координатных углов aa и bb (черт. 16). Действительно, симметричные относительно aa координатные прямоугольники $MQOP$ и $M_1Q_1OP_1$ имеют равные площади; также и симметричные относительно bb координатные прямоугольники $MQOP$ и $M_2Q_2OP_2$ имеют равные площади. Центр симметрии O и оси симметрии aa и bb часто называют просто центром и осями гиперболы; точки A и B, в которых гипербола пересекается с осью aa, называют вершинами гиперболы.

Пусть мы имеем гиперболу $xy = a$. Произведем сжатие плоскости к оси x с коэффициентом сжатия k. При этом гипербола $xy = a$ перейдет в гиперболу $xy = ak$, ибо абсцисса x каждой точки останется без изменения, а

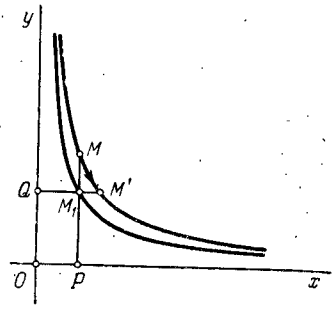


Черт. 15.



Черт. 16.

ордината y заменится на $y \cdot k$ (черт. 17). Затем произведем еще одно сжатие к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. При этом гипербола $xy = ak$ перейдет в гиперболу $xy = \frac{ak}{k} = a$: ордината y любой точки при новом сжатии к оси не меняется, а абсцисса x переходит в $\frac{x}{k}$. Таким образом, мы видим, что *последовательное сжатие плоскости к оси x с коэффициентом k и к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$ переводит гиперболу $xy = a$ в себя.* Последовательность этих двух сжатий плоскости к прямой образует преобразование, называемое гиперболическим поворотом. Название «гиперболический поворот» связано с тем, что при таком преобразовании все точки гиперболы «скользят по кривой»; так, на черт. 17 точка M сначала переходит в точку M_1, а затем точка M_1 переходит в точку M', т. е. окончательно гиперболический поворот переводит точку M гиперболы в точку M' той же гиперболы. Это положение аналогично вращению окружности — гипербола как бы «поворачивается».



Черт. 17.

Отметим следующие свойства гиперболического поворота:

а) *при гиперболическом повороте всякая прямая переходит в прямую* (следствие свойства а) § 1);

б) *при гиперболическом повороте оси координат (асимптоты гиперболы) переходят сами в себя* (ибо они переходят в себя при каждом из двух сжатий, которые образуют гиперболический поворот);

в) *при гиперболическом повороте параллельные прямые переходят в параллельные* (следствие свойства б) § 1);

г) *при гиперболическом повороте сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой* (следствие свойства в) § 1);

д) *при гиперболическом повороте сохраняются площади фигур* (ибо при первом сжатии к прямой площади всех фигур умножаются на k, а при втором — делятся на k; см. свойство г) § 1).

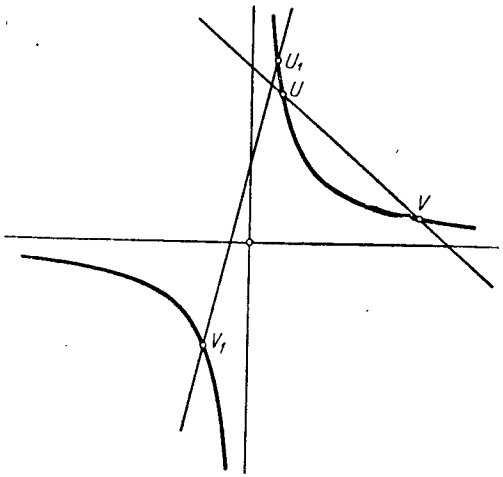
Очень важно заметить, что *при помощи гиперболического поворота можно перевести каждую точку гиперболы в любую другую*. Действительно, первое сжатие переводит точку (x, y) гиперболы $xy = a$ в точку (x, yk) гиперболы $xy = ak$; второе сжатие переводит точку (x, yk) гиперболы $xy = ak$ в точку $\left(\frac{x}{k}, yk\right)$ первоначальной гиперболы (см. черт. 17). Таким образом, в результате гиперболического поворота точка (x, y) переходит в точку $\left(\frac{x}{k}, yk\right)$. Отсюда и вытекает, что при помощи подходящего гиперболического поворота можно точку (x, y) гиперболы перевести в любую другую точку (x_1, y_1) той же гиперболы: для этого достаточно выбрать k так, чтобы было $x_1 = \frac{x}{k}$ или $k = \frac{x}{x_1}$.

§ 3. Несколько свойств гиперболы

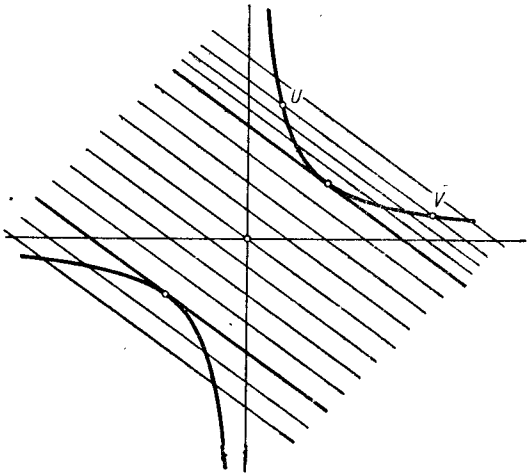
Используя гиперболический поворот, можно доказать ряд интересных геометрических свойств гиперболы. Однако предварительно мы определим, что называется хордой и касательной гиперболы.

Прямая, пересекающая гиперболу в двух точках, называется секущей гиперболы; отрезок секущей, концами которой служат точки гиперболы, называется хордой гиперболы. Секущие гиперболы (так же как и хорды) бывают двух родов; секущие первого рода пересекают лишь одну ветвь гиперболы, а секущие второго рода — обе ветви (черт. 18а). Рассмотрим какую-нибудь секущую первого рода. Среди прямых, параллельных этой секущей, будут такие, которые пересекают гиперболу в двух точках; будут прямые, совсем не пересекающие гиперболу; наконец, две из этих прямых, называемые касательными к гиперболе, будут иметь с гиперболой одну общую точку (черт. 18б)[1]. При гиперболическом повороте хорда UV гиперболы переходит в новую хорду $U'V'$, причем если U и V — точки одной ветви (разных ветвей) гиперболы, то U' и V' тоже принадлежат одной ветви (разным ветвям). Действительно, точки U и V гиперболы

[1]) Касательную к гиперболе можно также определить как прямую, имеющую с гиперболой одну общую точку, не параллельную асимптоте (всякая прямая, параллельная асимптоте, пересекает гиперболу в единственной точке, но не является касательной).



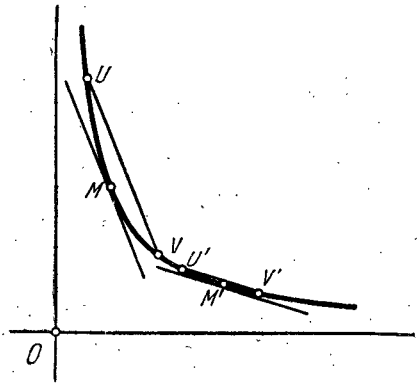
Черт. 18а.



Черт. 18б.

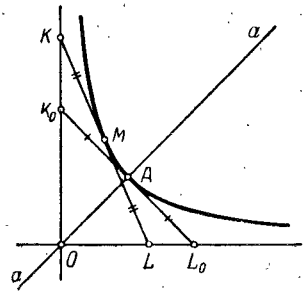
переходят в точки U' и V', где, например, U' принадлежит той же ветви, что и U (черт. 19).

Касательная гиперболы в какой-либо точке M при гиперболическом повороте, переводящем M в M', переходит в касательную в точке M' (для доказательства рассмотрим



Черт. 19.

хорду UV, параллельную первой касательной; она перейдет в хорду $U'V'$, а прямая, параллельная UV и имеющая с гиперболой единственную общую точку M, перейдет в прямую, параллельную $U'V'$ и имеющую с гиперболой единственную общую точку M'; черт. 19).



Черт. 20.

Перейдем теперь к доказательству свойств гиперболы.

1. *Отрезок касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами кривой, делится в точке касания пополам.*

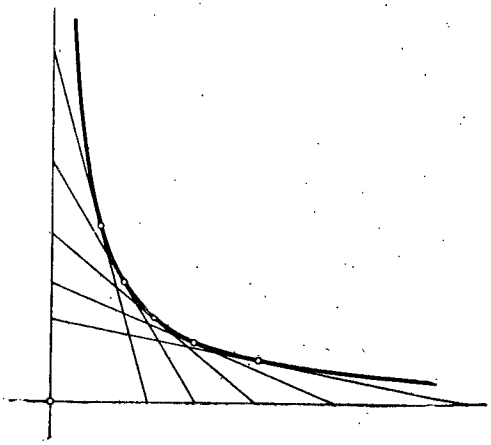
Так как биссектриса aa координатного угла служит осью симметрии гиперболы (черт. 20), то отрезок K_0L_0 касательной в вершине A, заключенный между осями координат, делится в точке A пополам: отрезки AK_0 и AL_0 переходят друг в друга при симметрии относительно оси aa. Пусть теперь KL есть отрезок касательной к гиперболе в какой-либо другой ее точке M. Произведем гиперболический поворот, перево-

дящий точку M в точку A. При этом касательная в точке M перейдет в касательную в точке A. Далее отрезок KL перейдет в отрезок K_0L_0 (см. свойства а) и б) § 2). А так как при гиперболическом повороте середина отрезка переходит в середину отрезка (см. свойство г) § 2), то M есть середина отрезка KL, что и требовалось доказать.

2. *Площадь треугольника, отсекаемого касательной к гиперболе $xy = a$ от координатного угла, одна и та же для всех касательных.*

Для доказательства рассмотрим треугольник KOL, отсекаемый от координатного угла касательной к гиперболе $xy = a$ в какой-либо ее точке M (черт. 20). Гиперболический поворот, переводящий точку M в точку A, переводит треугольник KOL в треугольник K_0OL_0, где K_0L_0 — касательная к гиперболе в точке A. Отсюда в силу свойства д) § 2 имеем $S_{\triangle KOL} = S_{\triangle K_0OL_0}$, т. е. площадь треугольника KOL не зависит от выбора точки M, что и требовалось доказать.

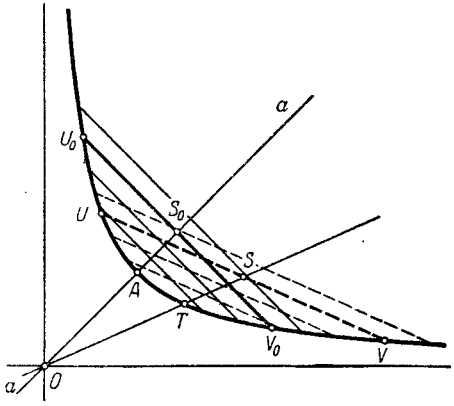
Из свойств 1 и 2 вытекает, что одну ветвь гиперболы можно *определить как геометрическое место середин отрезков, отсекающих равные площади от данного прямого угла* (черт. 21).



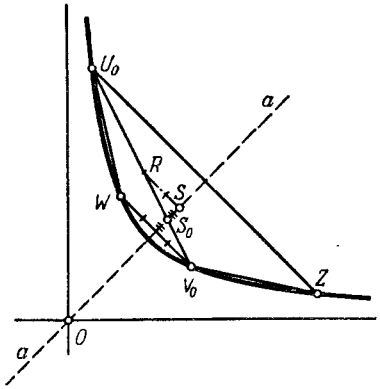
Черт. 21.

3. *Середины всех параллельных между собой хорд гиперболы лежат на одной прямой, проходящей через центр гиперболы.*

Пусть UV — какая-то хорда гиперболы, S — её середина, T — точка пересечения прямой OS с гиперболой (черт. 22а[1])). Произведем гиперболический поворот, переводящий точку T в вершину A гиперболы. При этом прямая OT перейдет



Черт. 22а.



Черт. 22б.

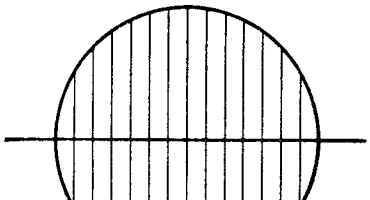
в ось aa гиперболы, хорда UV перейдет в хорду U_0V_0, которая делится осью симметрии aa пополам. Но это возможно

[1]) Мы здесь ограничиваемся тем случаем, когда хорда UV — первого рода (см. выше, стр. 16), т. е. точки U и V принадлежат одной ветви (только этот случай нам понадобится в дальнейшем). Предоставляем читателю самому разобрать тот случай, когда хорда UV такова, что точки U и V принадлежат разным ветвям гиперболы.

только в том случае, если $U_0V_0 \perp aa$. Действительно, пусть U_0V_0 не перпендикулярна к aa. Проведем хорды U_0Z и V_0W, перпендикулярные к aa. Так как aa — ось симметрии гиперболы, то $U_0ZV_0W_0$ — равнобочная трапеция, имеющая осью симметрии aa. Но ось симметрии равнобочной трапеции не может делить пополам ее диагональ (так, на черт. 22б $V_0S_0 = S_0R < S_0U_0$), что и приводит к противоречию. Все хорды, параллельные UV, переходят в хорды, параллельные U_0V_0, т. е. перпендикулярные к оси симметрии aa геперболы; середины всех этих хорд лежат на прямой aa. Отсюда следует, что середины всех хорд, параллельных UV, лежат на прямой OT, что и требовалось доказать.

Всякая прямая, проходящая через центр гиперболы, называется диаметром гиперболы (аналогично тому, как диаметры окружности — это прямые, проходящие через ее центр)[1]). Диаметр гиперболы, делящий пополам все хорды данного направления, называют сопряженным этим хордам; обратно, хорды называют сопряженными диаметру, делящему их пополам. Впоследствии мы также будем говорить о радиусах гиперболы, понимая под этим отрезок диаметра, идущий от центра гиперболы до точки пересечения диаметра с гиперболой (т. е. радиусы гиперболы определяются аналогично радиусам окружности).

Отметим, что окружность также обладает свойством, аналогичным свойству 3 гиперболы: *середины всех параллельных между собой хорд окружности лежат на одной прямой, проходящей через центр окружности* (а именно, на диаметре окружности, перпендикулярном к хордам, черт. 23).



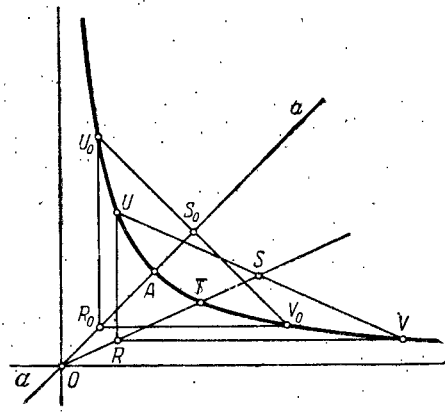
Черт. 23.

4. *Прямые, проведенные через концы произвольной хорды гиперболы параллельно асимптотам, пересекаются на диаметре, сопряженном этой хорде.*

Пусть UV — произвольная хорда гиперболы; S — ее середина, T — точка пересечения прямой OS с гиперболой

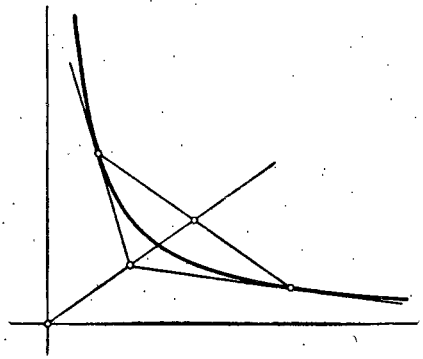
[1]) В данной брошюре под диаметром понимается вся прямая, а не отрезок ее.

(черт. 24). Произведем гиперболический поворот, переводящий точку T в вершину A гиперболы. При этом хорда UV перейдет в хорду U_0V_0, перпендикулярную к оси aa (см. доказательство свойства 3). Прямые UR и VR, параллельные



Черт. 24.

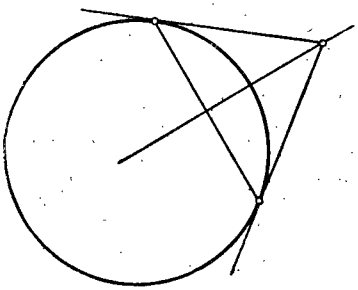
асимптотам, переходят в прямые U_0R_0 и V_0R_0, параллельные асимптотам (см. свойства б) и в) § 2). Так как aa есть ось симметрии гиперболы и биссектриса угла между асимптотами, то точка R_0 пересечения прямых U_0R_0 и V_0R_0 лежит на aa. Отсюда следует, что точка R пересечения прямых и UR и VR лежит на диаметре OT, что и требовалось доказать.



Черт. 25а.

5. *Касательные к гиперболе в концах произвольной хорды пересекаются на диаметре, сопряженном этой хорде* (черт. 25а).

Доказательство свойства 5 гиперболы, совершенно аналогичное доказательству свойства 4, предоставляем читателю.



Черт. 25б.

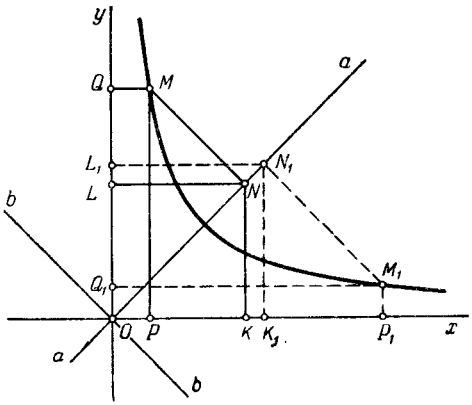
Отметим, что и окружность обладает аналогичным свойством: *касательные к окружности в концах произвольной хорды пересекаются на диаметре окружности, перпендикулярном к этой хорде* (черт. 25б).

ГЛАВА II

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Уравнение гиперболы, отнесенной к осям

Пусть попрежнему координаты точки M гиперболы в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, будут x и y, так что уравнение гиперболы будет иметь вид $xy = a$ (черт. 26). Примем оси aa и bb гиперболы за но-



Черт. 26.

вые оси координат; координаты точки M относительно новой системы координат обозначим через X и Y. Выразим старые координаты x и y через новые X и Y.

Обозначим проекцию точки M на ось aa через N; проекции точек M и N на оси Ox, Oy обозначим соответственно через P, Q и K, L (черт. 26). Тогда

$$OP = OK - PK = ON\cos 45° - NM\cos 45°,$$
$$OQ = OL + LQ = ON\cos 45° + NM\cos 45°$$

(ибо проекция отрезка на прямую, составляющую с направлением отрезка угол 45°, равна длине отрезка, умноженной на $\cos 45°$). Но $OP = x$, $OQ = y$, $ON = X$, $NM = Y$, и мы получим [1]):

$$\left.\begin{aligned} x &= (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Подставим в формулу $xy = a$ полученные значения x и y. Мы будем иметь:

$$(X^2 - Y^2)\frac{1}{2} = a \text{ или } X^2 - Y^2 = 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенной к осям.

Гипербола

$$X^2 - Y^2 = 1$$

называется единичной гиперболой; ее уравнение аналогично уравнению единичной окружности [2]) (окружность радиуса единица)

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Уравнение единичной гиперболы в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, имеет вид

$$xy = \frac{1}{2}$$

$\left(\text{в этом случае } 2a = 1 \text{ и, следовательно, } a = \frac{1}{2}\right)$.

---

[1]) Для точки M_1 (черт. 26) имеем:

$$x_1 = OP_1 = OK_1 + K_1P_1 = ON_1 \cos 45° + N_1M_1 \cos 45° = X_1\frac{\sqrt{2}}{2} + (-Y_1)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

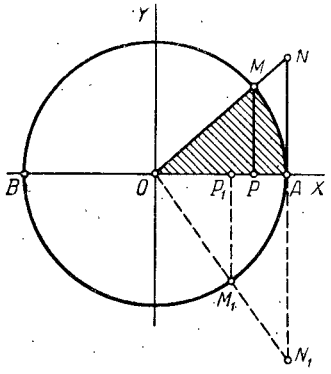
$$y_1 = OQ_1 = OL_1 - Q_1L_1 = ON_1 \cos 45° - N_1M_1 \cos 45° = X_1\frac{\sqrt{2}}{2} - (-Y)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

т. е. те же самые формулы (*). Предоставляем читателю самому проверить, что те же формулы сохраняют силу и для точек второй ветви гиперболы, расположенной в III квадранте старой системы координат (впрочем, это обстоятельство нам нигде не понадобится).

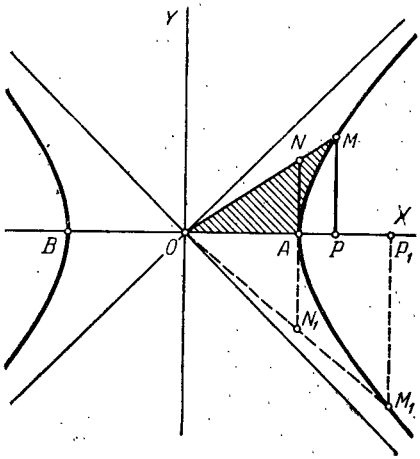
[2]) Пусть M — произвольная точка окружности радиуса 1 с центром в начале координат (черт. 27а), (X, Y) — ее координаты. По теореме Пифагора имеем: $OP^2 + PM^2 = OM^2$, но $OP = X$, $PM = Y$, $OM = 1$, следовательно, для произвольной точки окружности имеет место равенство $X^2 + Y^2 = 1$.

§ 2. Определение и основные свойства гиперболических функций

Приступим теперь непосредственно к построению теории гиперболических функций (или также — гиперболических тригонометрических функций), во многом аналогичной теории обычных (круговых) тригонометрических функций. Для того чтобы подчеркнуть аналогию между круговыми и гиперболическими функциями, мы почти все время будем вести изложение двумя столбцами: слева мы будем перечислять известные положения из теории круговых тригонометрических функций, а справа излагать теорию гиперболических функций.



Черт. 27а.



Черт. 27б.

Рассмотрим единичную окружность (черт. 27а)

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Углом α (в радианной мере) между радиусами OA и OM окружности называется число, равное длине дуги AM или равное удвоенной площади

Рассмотрим единичную гиперболу (черт. 27 б)

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Гиперболическим углом t между двумя радиусами OA и OM гиперболы называется число, равное удвоенной площади сектора, ограниченного

сектора OAM, ограниченного этими радиусами и дугой окружности.

Опустим из точки M окружности перпендикуляр MP на диаметр OA; в точке A проведем касательную к окружности до пересечения с диаметром OM в точке N. Отрезок PM перпендикуляра есть линия синуса, отрезок OP диаметра — линия косинуса и отрезок AN касательной — линия тангенса.

Длины отрезков PM, OP и AN соответственно равны синусу, косинусу и тангенсу угла α:

$$PM = \sin\alpha,\quad OP = \cos\alpha,$$
$$AN = \operatorname{tg}\alpha.$$

этими радиусами и дугой гиперболы [1]).

Опустим из точки M гиперболы перпендикуляр MP на диаметр OA — ось симметрии гиперболы, пересекающую гиперболу в вершине A; в точке A проведем касательную к гиперболе до пересечения с диаметром OM в точке N. Отрезок PM перпендикуляра называется линией гиперболического синуса, отрезок OP диаметра — линией гиперболического косинуса и отрезок AN касательной — линией гиперболического тангенса. Длины отрезков PM, OP и AN называются соответственно гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом и гиперболическим тангенсом гиперболического угла t и обозначаются [2])

$$PM = \operatorname{sh} t,\quad OP = \operatorname{ch} t,$$
$$AN = \operatorname{th} t.$$

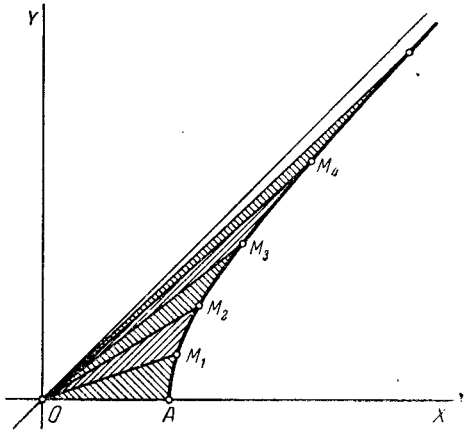
Известно, что тригонометрические функции угла изменяются периодически с периодом 2π. В противоположность этому гиперболические функции не периодичны.

---

[1]) Основное свойство угла α состоит в том, что α не меняется при повороте сектора AOM вокруг O. Аналогично этому гиперболический угол t не меняется при гиперболическом повороте фигуры AOM (см. свойство д) § 2, гл. I).

[2]) Отношения $\frac{1}{PM}$, $\frac{1}{OP}$ и $\frac{1}{AN}$ иногда называют гиперболическим косекансом, гиперболическим секансом и гиперболическим котангенсом гиперболического угла t.

Гиперболический угол t может изменяться от 0 до ∞. Для того чтобы это доказать (т. е. доказать, что площадь гиперболического сектора AOM может быть сколь угодно велика), рассмотрим какой-либо гиперболический угол AOM_1, величину которого мы обозначим через t_1. Произведем гиперболический поворот, переводящий точку A в точку M_1; пусть при этом точка M_1 переходит в M_2, M_2 — в M_3, M_3 — в M_4 и т. д. (черт. 28). В силу свойства д) § 2 гл. I площади



Черт. 28.

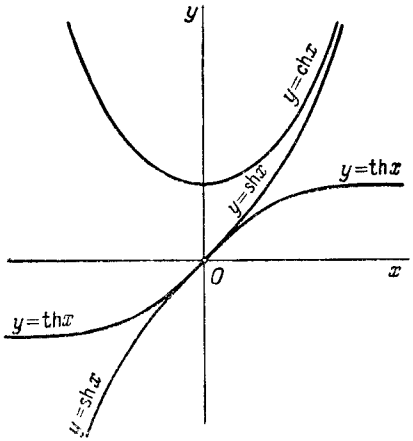
гиперболических секторов AOM_1, M_1OM_2, M_2OM_3, M_3OM_4, ... равны между собой, следовательно, гиперболические углы AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, ... соответственно равны t_1, $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$, ... Отсюда и вытекает, что гиперболический угол может быть сколь угодно велик.

Из определения гиперболических функций (черт. 27б) легко видеть, что при изменении гиперболического угла t от 0 до ∞ $\operatorname{sh} t$ изменяется от 0 до ∞, $\operatorname{ch} t$ изменяется от 1 до ∞ и $\operatorname{th} t$ изменяется от 0 до 1. Если в полной аналогии с круговыми функциями считать угол AOM_1 (черт. 27б) отрицательным, равным $-t_1$, где t_1 есть удвоенная площадь сектора AOM_1, и положить

$$\operatorname{sh}(-t_1) = -M_1P_1 = -\operatorname{sh} t_1, \quad \operatorname{ch}(-t_1) = OP_1 = \operatorname{ch} t_1,$$
$$\operatorname{th}(-t_1) = -N_1A = -\operatorname{th} t_1,$$

443—О

то графики гиперболических функций будут иметь такой вид, как изображено на черт. 29. Заметим еще, что $\operatorname{sh} 0 = \operatorname{th} 0 = 0$, а $\operatorname{ch} 0 = 1$ (аналогично тому, как $\sin 0 = \operatorname{tg} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$).



Черт. 29.

Выведем теперь основные зависимости между тригонометрическими (круговыми и гиперболическими) функциями.

Из подобия треугольников OMP и ONA (черт. 27а) следует:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Но $\frac{AN}{OA} = \operatorname{tg}\alpha$ (ибо $OA = 1$), а

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Таким образом, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (I)$$

Далее, координаты точки M окружности равны $OP = X$, $PM = Y$.

Из подобия треугольников OMP и ONA (черт. 27б) следует:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Но $\frac{AN}{OA} = \operatorname{th} t$ (ибо $OA = 1$; для точки A координата $Y = 0$, а следовательно, $OA^2 = X^2 = 1 + Y^2 = 1$), а

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}.$$

Таким образом, получаем:

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}. \qquad (I)$$

Далее, координаты точки M гиперболы равны $OP = X$, $PM = Y$.

Уравнение единичной окружности имеет вид $X^2 + Y^2 = 1$. Следовательно,

$$OP^2 + PM^2 = 1$$

или

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \quad \text{(II)}$$

Разделив обе части тождества (II) сначала на $\cos^2\alpha$, а затем на $\sin^2\alpha$, мы получим еще две формулы

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \text{(III)}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad \text{(IV)}$$

Уравнение единичной гиперболы имеет вид $X^2 - Y^2 = 1$. Следовательно,

$$OP^2 - PM^2 = 1$$

или

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1. \quad \text{(II)}$$

Разделив обе части тождества (II) сначала на $\operatorname{ch}^2 t$, а затем на $\operatorname{sh}^2 t$, мы получим еще две формулы:

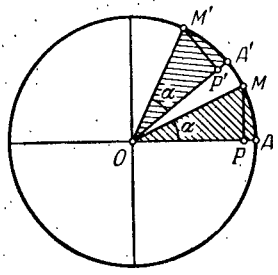
$$1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \text{(III)}$$

$$\frac{1}{\operatorname{th}^2 t} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}. \quad \text{(IV)}$$

§ 3. Формулы сложения

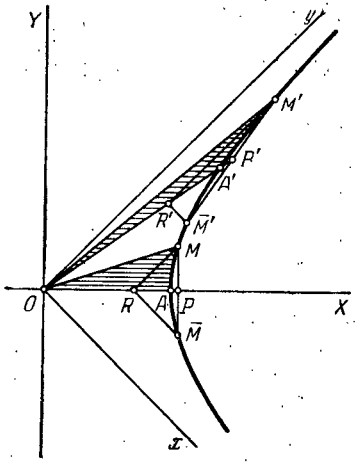
Выведем теперь формулы сложения для круговых и гиперболических функций.

Пусть поворот вокруг точки O переводит радиусы OA и OM окружности (угол $AOM = \alpha$) в радиусы OA' и OM' (черт. 30а). Пусть далее линии PM и OP синуса и косинуса угла MOP перейдут при этом в отрезки $P'M'$ и OP'; очевидно, $M'P'$ перпендикулярно к диаметру



Черт. 30а.

Пусть гиперболический поворот переводит радиусы OA и OM гиперболы (A — вершина гиперболы; гиперболи-



Черт. 30б.

OA'. Так как $P'M' = PM$ и $OP' = OP$ (при повороте длина отрезка не меняется), то равенства $\sin\alpha = PM$; $\cos\alpha = OP$ дают также

$$\sin\alpha = P'M'; \quad \cos\alpha = OP'.$$

ческий угол $AOM = t$) в радиусы OA' и OM' (черт. 30б; см. сноску [1]) на стр. 27). Пусть далее линии PM и OP (гиперболического) синуса и косинуса угла t перейдут при этом в отрезки $P'M'$ и OP'. Если $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ — вторые точки пересечения MP и $M'P'$ с гиперболой, то $MP = P\overline{M}$ (так как OA — ось симметрии гиперболы) и $M'P' = P'\overline{M}'$ (вытекает из равенства $MP = P\overline{M}$ в силу свойства г) § 2 гл. I). Другими словами, хорды $M\overline{M}$ и $M'\overline{M}'$ сопряжены соответственно диаметрам OP и OP' (см. выше, стр. 21).

Равенства $\operatorname{sh} t = P$; $\operatorname{ch} t = OP$ можно также записать в виде $\operatorname{sh} t = \frac{PM}{OA}$, $\operatorname{ch} t = \frac{OP}{OA}$ (ибо $OA = 1$; см. выше, стр. 29). Докажем, что также

$$\operatorname{sh} t = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP'}{OA'}.$$

Проведем через точки M и $\overline{M}$, M' и $\overline{M}'$ прямые, параллельные асимптотам: $MR \parallel M'R' \parallel Oy$, $\overline{M}R \parallel \overline{M}'R' \parallel Ox$ (черт. 30б). В силу свойства 4 § 3, гл. I точки R и R' принадлежат соответственно диаметрам OA и OA'. Так как

$$\angle MR\overline{M} = \angle M'R'\overline{M}' = \angle yOx = 90°,$$

то треугольники $MR\overline{M}$ и $M'R'\overline{M}'$ — прямоугольные.

Точки P и P' — середины гипотенуз этих треугольников; они одновременно являются центрами описанных около треугольников окружностей. Следовательно,

$$PM = \overline{M}P = RP,$$
$$P'M' = \overline{M}'P' = R'P'.$$

Теперь мы можем записать

$$\operatorname{sh} t = \frac{RP}{\overline{OA}}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP}{\overline{OA}}.$$

Но по свойству г) § 2 гл. I

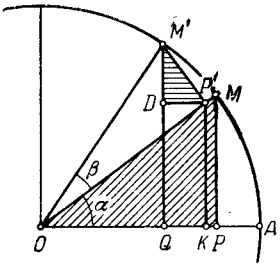
$$\frac{RP}{\overline{OA}} = \frac{R'P'}{\overline{OA'}}; \quad \frac{OP}{\overline{OA}} = \frac{OP'}{\overline{OA'}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh} t = \frac{R'P'}{OA'} = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP'}{OA'},$$

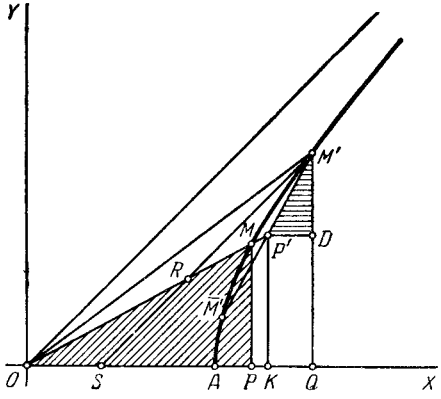
что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\angle AOM = \alpha$, $\angle MOM' = \beta$ (черт. 31а).



Черт. 31а.

Пусть теперь гиперболические углы AOM и MOM'



Черт. 31б.

Опустим из точек M и M' перпендикуляры MP и $M'Q$ на OA; далее, из точки M' равны соответственно t и u (черт. 31б). Опустим из точек M и M' перпендикуляры

Опустим перпендикуляр $M'P'$ на OM и из точки P' перпендикуляры $P'D$ на $M'Q$ и $P'K$ на OA. В таком случае имеем:

$$\sin\alpha = PM, \quad \cos\alpha = OP;$$
$$\sin\beta = P'M', \quad \cos\beta = OP';$$
$$\sin(\alpha+\beta) = QM',$$
$$\cos(\alpha+\beta) = OQ.$$

Треугольники OMP и $OP'K$ подобны: оба они прямоугольные и имеют общий угол.

Треугольники OMP и $M'P'D$ тоже подобны: оба эти треугольника прямоугольные и $\angle MOP = \angle P'M'D$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Очевидно (черт. 31а),

$$\sin(\alpha+\beta) = QM' = KP' + DM',$$
$$\cos(\alpha+\beta) = OQ = OK - DP'.$$

MP и $M'Q$ на OA; далее, из точки M' проведем хорду $M'\overline{M}'$, сопряженную OM (см. выше, стр. 21), $M'\overline{M}'$ пересекает OM в точке P'; из точки P' опустим перпендикуляры $P'D$ на $M'Q$ и $P'K$ на OA. В таком случае имеем:

$$\operatorname{sh} t = PM, \quad \operatorname{ch} t = OP;$$
$$\operatorname{sh} u = \frac{P'M'}{OM}, \quad \operatorname{ch} u = \frac{OP'}{OM};$$
$$\operatorname{sh}(t+u) = QM',$$
$$\operatorname{ch}(t+u) = OQ.$$

Треугольники OMP и $OP'K$ подобны: оба они прямоугольные и имеют общий угол.

Треугольники OMP и $M'P'D$ тоже подобны. Оба они прямоугольные и $\angle MOP = \angle P'M'D$. Действительно, прямая $M'R$, параллельная асимптоте Oy гиперболы, пересекает диаметр OM в точке R и ось OA в точке S. Тогда $\angle QM'S = \angle QSM' = 45°$. Далее $\angle P'M'R = \angle M'RP'$, так как $P'M' = RP'$ (см. выше, стр. 32). Но $\angle MOP = \angle M'SQ - \angle SRO = \angle M'SQ - \angle M'RP'$, $\angle P'M'D = \angle SM'Q - \angle RM'P'$, следовательно,

$$\angle MOP = \angle P'M'D.$$

Очевидно (черт. 31б),

$$\operatorname{sh}(t+u) = QM' = KP' + DM',$$
$$\operatorname{ch}(t+u) = OQ = OK + P'D.$$

Из подобия треугольников OMP и $OP'K$ следует:

$$\frac{KP'}{OP'}=\frac{PM}{OM},\quad KP'=\frac{OP'}{OM}PM;$$

$$\frac{OK}{OP'}=\frac{OP}{OM},\quad OK=\frac{OP'}{OM}OP.$$

Из подобия треугольников OMP и $M'P'D$ следует:

$$\frac{DM'}{P'M'}=\frac{OP}{OM},\quad DM'=\frac{P'M'}{OM}OP,$$

$$\frac{DP'}{P'M'}=\frac{PM}{OM},\quad DP'=\frac{P'M'}{OM}PM.$$

Учитывая теперь, что

$$PM=\sin\alpha,\quad OP=\cos\alpha;$$

$$\frac{P'M'}{OM}=\sin\beta,\quad \frac{OP'}{OM}=\cos\beta,$$

окончательно имеем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \quad (V)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \quad (VI)$$

Из формулы (V), (VI) и формул (I), (II) предыдущего параграфа вытекают уже все остальные формулы тригонометрии. Так, например, имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей справа, на $\cos\alpha\cos\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \quad (VII)$$

Из подобия треугольников OMP и $OP'K$ следует:

$$\frac{KP'}{OP'}=\frac{PM}{OM},\quad KP'=\frac{OP'}{OM}PM;$$

$$\frac{OK}{OP'}=\frac{OP}{OM},\quad OK=\frac{OP'}{OM}OP.$$

Из подобия треугольников OMP и $M'P'D$ следует:

$$\frac{DM'}{P'M'}=\frac{OP}{OM},\quad DM'=\frac{P'M'}{OM}OP;$$

$$\frac{P'D}{P'M'}=\frac{PM}{OM},\quad P'D=\frac{P'M'}{OM}PM.$$

Учитывая теперь, что

$$PM=\operatorname{sh}t,\quad OP=\operatorname{ch}t;$$

$$\frac{P'M'}{OM}=\operatorname{sh}u,\quad \frac{OP'}{OM}=\operatorname{ch}u,$$

окончательно имеем:

$$\operatorname{sh}(t+u)=\operatorname{sh}t\operatorname{ch}u+\operatorname{ch}t\operatorname{sh}u, \quad (V)$$

$$\operatorname{ch}(t+u)=\operatorname{ch}t\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}t\operatorname{sh}u. \quad (VI)$$

Из формул (V), (VI) и формул (I), (II) предыдущего параграфа можно получить все остальные формулы гиперболической тригонометрии. Так, например, имеем:

$$\operatorname{th}(t+u)=\frac{\operatorname{sh}(t+u)}{\operatorname{ch}(t+u)}=\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}u+\operatorname{ch}t\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}t\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}t\operatorname{sh}u}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей справа, на $\operatorname{ch}t\operatorname{ch}u$, получим:

$$\operatorname{th}(t+u)=\frac{\operatorname{th}t+\operatorname{th}u}{1+\operatorname{th}t\operatorname{th}u}. \quad (VII)$$

Если $\beta = \alpha$, то формулы (V), (VI) и (VII) примут вид

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \text{(VIII)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad \text{(X)}$$

Из формул (V), (VI) находим:

$$\sin \alpha = \sin (\alpha + \beta) \cos \beta - \cos (\alpha + \beta) \sin \beta,$$

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + \beta) \cos \beta + \sin (\alpha + \beta) \sin \beta.$$

Последние формулы, если в них заменить $\alpha + \beta$ на α и α на $\alpha - \beta$, примут вид

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad \text{(XI)}$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad \text{(XII)}$$

Разделив почленно формулу (XI) на (XII), получим:

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad \text{(XIII)}$$

Выразим еще $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ через тангенс половинного угла. Из формул (VIII)—(X) и (III) следует:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{(XIV)}$$

Если $u = t$, то формулы (V), (VI) и (VII) примут вид:

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad \text{(VIII)}$$

$$\operatorname{ch} 2t = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t, \quad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{th} 2t = \frac{2 \operatorname{th} t}{1 + \operatorname{th}^2 t}. \quad \text{(X)}$$

Из формул (V), (VI) находим:

$$\operatorname{sh} t = \operatorname{sh} (t + u) \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} (t + u) \operatorname{sh} u,$$

$$\operatorname{ch} t = \operatorname{ch} (t + u) \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} (t + u) \operatorname{sh} u.$$

Последние формулы, если в них заменить $t + u$ на t и t на $t - u$, примут вид

$$\operatorname{sh} (t - u) = \operatorname{sh} t \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u, \quad \text{(XI)}$$

$$\operatorname{ch} (t - u) = \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u. \quad \text{(XII)}$$

Разделив почленно формулу (XI) на (XII), получим:

$$\operatorname{th} (t - u) = \frac{\operatorname{th} t - \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} t \operatorname{th} u}. \quad \text{(XIII)}$$

Выразим еще $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{th} t$ через (гиперболический) тангенс половинного угла. Из формул (VIII)—(X) и (III) следует:

$$\operatorname{sh} t = 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \operatorname{ch} \frac{t}{2} = 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2}} \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} = 2 \operatorname{th} \frac{t}{2} \times$$

$$\times \frac{1}{1/\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}, \quad \text{(XIV)}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \qquad \operatorname{ch} t = \operatorname{ch}^2\frac{t}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{t}{2} =$$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \qquad = \operatorname{ch}^2\frac{t}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}\right) =$$

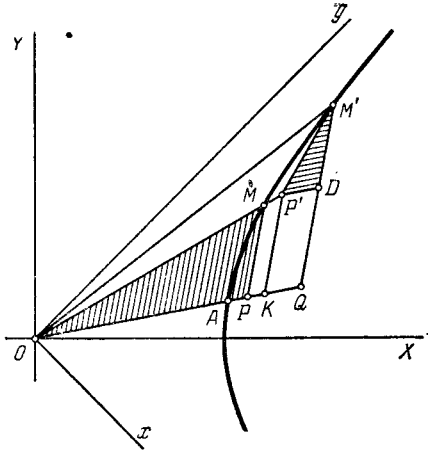
$$= \frac{1}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \qquad = \frac{1}{1/\operatorname{ch}^2\frac{t}{2}}\left(1 + \operatorname{th}^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{(XV)} \qquad = \frac{1 + \operatorname{th}^2\frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{t}{2}} \quad \text{(XV)}$$

и и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \quad \text{(XVI)} \qquad \operatorname{th} t = \frac{2\operatorname{th}\frac{t}{2}}{1 + \operatorname{th}^2\frac{t}{2}}. \quad \text{(XVI)}$$

Отметим, что при выводе формул сложения для гиперболических функций нам не было необходимости откладывать первый угол t от оси симметрии OA гиперболы. Почти в точности, как выше, можем вывести формулы V и VI, и в случае произвольного положения диаметра OA (черт. 32), где (гиперболические) углы AOM и MOM' равны соответственно t и u, MP и $M'Q$ сопряжены OA, $M'P'$ сопряжена OM и, следовательно,



Черт. 32.

$$\operatorname{sh} t = \frac{PM}{OA}; \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP}{OA};$$

$$\operatorname{sh} u = \frac{P'M'}{OM}; \quad \operatorname{ch} u = \frac{OP'}{OM};$$

$$\operatorname{sh}(t+u) = \frac{QM'}{OA};$$

$$\operatorname{ch}(t+u) = \frac{OQ}{OA},$$

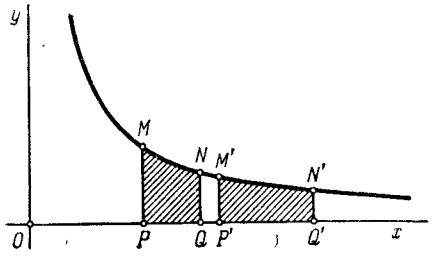
откуда и вытекают формулы V и VI, как и выше.

ГЛАВА III

СВЯЗЬ С ЛОГАРИФМАМИ

§ 1. Геометрическая теория логарифмов

Рассмотрим гиперболу $xy = 1$ (черт. 33). Возьмем на этой гиперболе две произвольные точки M и N и опустим из них перпендикуляры MP и NQ на ось x. Рассмотрим криволинейную трапецию $PQNM$ [1]). Площадь S_{PQNM} этой



Черт. 33.

трапеции зависит от абсцисс $OP = x_1$ и $OQ = x_2$ точек M и N $(x_2 > x_1)$. Выясним, как именно зависит S_{PQNM} от x_1 и x_2, т. е. как вычислить эту площадь, зная x_1 и x_2.

Докажем прежде всего, что *площадь* S_{PQNM} *зависит только от отношения* $\frac{x_2}{x_1}$. Другими словами, покажем, что если две криволинейные трапеции $PQNM$ $(OP = x_1,\ OQ = x_2)$

---

[1]) Криволинейной трапецией будем называть фигуру, ограниченную двумя ординатами (абсциссами), отрезком оси абсцисс (ординат), заключенным между указанными ординатами (абсциссами) и дугой кривой линии.

и $P'Q'N'M'$ ($OP' = x_1'$, $OQ' = x_2'$) таковы, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2'}{x_1'},$$

то площади этих трапеций равны (черт. 33). Произведем гиперболический поворот, переводящий MP в $M'P'$. В силу свойств г) § 2 гл. I точка Q перейдет в такую точку $\overline{Q}$, что $\frac{O\overline{Q}}{OP'} = \frac{OQ}{OP}$, т. е. в точку Q' $\left(\text{ибо } \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{x_2}{x_1}\right)$. Это значит, что NQ перейдет в $N'Q'$ и криволинейная трапеция $PQNM$ — в криволинейную трапецию $P'Q'N'M'$. А следовательно, согласно свойству д) § 2 гл. I $S_{PQNM} = S_{P'Q'N'M'}$.

Итак, мы видим, что площадь S_{PQNM} зависит лишь от отношения $\frac{x_2}{x_1} = z$, т. е. является функцией от z. Обозначим эту функцию через $S(z)$:

$$S_{PQNM} = S\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = S(z).$$

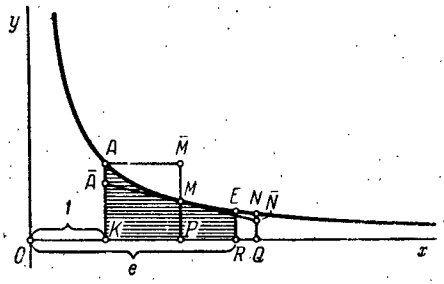
Очевидно, $S(z)$ есть площадь трапеции, ограниченной гиперболой, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = z$ $\left(\text{ибо } \frac{z}{1} = z\right)$.

Функция $S(z)$ определена для всякого z, большего 1. Из геометрического смысла ее следует, что это есть функция, возрастающая (если $z_1 > z_2$, то $S(z_1) > S(z_2)$) и непрерывная (близким значениям z отвечают близкие по величине значения $S(z)$). Естественно считать, что $S(1) = 0$ (трапеция вырождается в отрезок). Для достаточно больших z выражение $S(z)$ может быть сделано сколь угодно большим (доказательство этого в точности аналогично доказательству того, что гиперболический угол может быть сколь угодно велик; см. выше, стр. 28). Отсюда вытекает, что существует такое число $z > 1$, что $S(z) = 1$. Это число в дальнейшем будет играть значительную роль; мы обозначим его через e. Итак $S(e) = 1$ (черт. 34).

Найдем теперь формулу для функции $S(z)$. Докажем прежде всего, что для любых двух чисел z_1 и z_2, больших единицы,

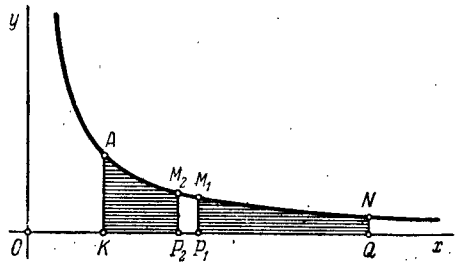
$$S(z_1) + S(z_2) = S(z_1 z_2)$$

(если, например, $z_1 = 1$, то это соотношение становится очевидным, так как $S(1) = 0$).



Черт. 34.

Действительно, $S(z_1)$ есть площадь криволинейной трапеции KP_1M_1A, где $OK = 1$, $OP_1 = z_1$ (черт. 35); $S(z_2)$ —



Черт. 35.

площадь криволинейной трапеции KP_2M_2A, где $OP_2 = z_2$, или равная ей площадь криволинейной трапеции P_1QNM_1, где $OQ = z_1z_2$ $\left(\text{ибо } \frac{z_1z_2}{z_1} = z_2\right)$. Отсюда непосредственно следует:

$$S(z_1) + S(z_2) = S_{KP_1M_1A} + S_{P_1QNM_1} = S_{KQNA} = S(z_1z_2),$$

что нам и надо было доказать.

Воспользовавшись полученным соотношением, можно показать, что для всякого положительного числа α

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Рассмотрим отдельно ряд случаев.

Если $\alpha = n$ — целое число, то последовательно получаем:

$$S(z^n) = S(z \cdot z^{n-1}) = S(z) + S(z^{n-1}) = S(z) + S(z \cdot z^{n-2}) =$$
$$= 2S(z) + S(z^{n-2}) = 2S(z) + S(z \cdot z^{n-3}) =$$
$$= 3S(z) + S(z^{n-3}) = \ldots = (n-2)S(z) + S(z^2) =$$
$$= (n-2)S(z) + S(z \cdot z) = nS(z).$$

Если $\alpha = \frac{1}{m}$, где m — целое, то по доказанному имеем:

$$S(z) = S[(z^{\frac{1}{m}})^m] = mS(z^{\frac{1}{m}}), \text{ откуда } S(z^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} S(z).$$

Если $\alpha = \frac{m}{n}$ рационально, то по доказанному имеем:

$$S(z^{\frac{n}{m}}) = S[(z^{\frac{1}{m}})^n] = nS(z^{\frac{1}{m}}) = n \cdot \frac{1}{m} S(z) = \frac{n}{m} S(z).$$

Наконец, если α — иррационально, то z^α определяется как предел чисел $z^{\frac{n_1}{m_1}}$, $z^{\frac{n_2}{m_2}}$, ..., $z^{\frac{n_k}{m_k}}$, ..., где рациональные дроби $\frac{n_1}{m_1}$, $\frac{n_2}{m_2}$, ..., $\frac{n_k}{m_k}$, ... стремятся к числу α. А так как по доказанному $S(z^{\frac{n_1}{m_1}}) = \frac{n_1}{m_1} S(z)$, $S(z^{\frac{n_2}{m_2}}) = \frac{n_2}{m_2} S(z)$, ..., $S(z^{\frac{n_k}{m_k}}) = \frac{n_k}{m_k} S(z)$, ..., то в пределе получаем, что и в этом случае [1])

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Пусть теперь z — произвольное число, большее единицы. Очевидно, $z = e^{\log_e z}$, где $\log_e z$ — логарифм числа z при основании e. Так как $e > 1$ (см. стр. 38) и $\log_e z > 0$ (ибо $z > 1$), то имеем:

$$S(z) = S(e^{\log_e z}) = \log_e z \cdot S(e) = \log_e z,$$

($S(e) = 1$ по определению числа e).

Итак, окончательно имеем:

$$S(z) = \log_e z.$$

---

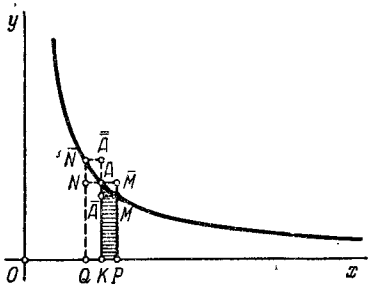
[1]) Здесь используется непрерывность функции $S(z)$.

Это и есть та формула, которую мы хотели получить. Из нее следует, что площадь криволинейной трапеции $PQNM$, ограниченной гиперболой $y=\frac{1}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=x_1$, $x=x_2$ $(x_2>x_1)$ равна $\log_e\frac{x_2}{x_1}$.

Таким образом, из геометрических рассмотрений, связанных с площадями, мы неожиданно пришли к логарифмам. При этом основание системы логарифмов равно некоторому определенному числу e, а не произвольно, как это имеет место при обычном введении логарифмов. Это обстоятельство проливает свет на то, почему создатели теории логарифмов Непер и Бюрги независимо друг от друга пришли к логарифмам по одному и тому же основанию e (а не по основанию 10, что было бы, казалось, проще всего). Это же «геометрическое» определение логарифмов связано с тем, что логарифмы по основанию e часто появляются в вопросах математики и физики, на первый взгляд не имеющих никакого отношения к логарифмической функции [1]).

Оценим число e. Площадь $S(2)$ криволинейной трапеции $KPMA$ $(OK=1,\ OP=2)$ меньше площади прямоугольника $KP\overline{M}A$, равного $KA\cdot KP=1\cdot 1=1$ (см. черт. 34); таким образом, $S(2)<1$. С другой стороны, площадь $S(3)$ криволинейной трапеции $KQNA$ $(OQ=3)$ больше площади трапеции $KQ\overline{N}\overline{A}$ ($\overline{A}\overline{N}$ — касательная к гиперболе в точке M), равной $PM\cdot KQ=\frac{1}{2}\cdot 2=1$; таким образом, $S(3)>1$. Из неравенств $S(2)<1<S(3)$ следует [2]), что

$$2<e<3.$$



Черт. 36.

Можно оценить число e еще точнее. Рассмотрим криволинейную трапецию $KPMA$, где $OK=1$, $OP=1+\frac{1}{n}$ (черт. 36).

---

[1]) Истории логарифмов посвящена популярная книга И. Б. Абельсон, Рождение логарифмов, Гостехиздат, М. — Л., 1948. См. также брошюру А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы, Гостехиздат, М. — Л., 1952. (Популярные лекции по математике, вып. 9).

[2]) Здесь использовано, что функция $S(z)$ — возрастающая.

Площадь этой трапеции, равная по доказанному выше $\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)$, заключается между площадями прямоугольников $KP\overline{M}A$ и $KPM\overline{A}$, изображенных на черт. 36, т. е. между $KA \cdot KP = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ и $KP \cdot PM = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} : \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n+1}$. Итак,

$$\frac{1}{n} > \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда получаем:

$$1 > n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$1 < (n+1)\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Из неравенств $\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 < \log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Эти последние неравенства позволяют оценить e с любой степенью точности: надо лишь положить в них n достаточно большим. Так, например, положив $n = 100$, получаем:

$$2{,}704 < \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} < e < \left(1+\frac{1}{100}\right)^{101} < 2{,}732,$$

откуда

$$e \approx 2{,}7.$$

Из неравенств $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и того, что при $n \to \infty$ отношение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{n}$ стремится к 1, следует:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (*)$$

Эту формулу часто принимают за определение числа e.

Отметим еще, что формула $(*)$ может быть обобщена следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a. \qquad (**)$$

Доказательство формулы $(**)$ почти не отличается от вывода формулы $(*)$. Предположим, что на черт. 36 $OP = 1+\frac{a}{n}$, a — положительно. В таком случае имеем $S_{KPMA} = \log_e\left(1+\frac{a}{n}\right)$,

$$S_{KPMA} = KA \cdot KP = 1\cdot\frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

и

$$S_{KPMA} = KP\cdot PM = \frac{a}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{a}{n}} = \frac{a}{n}\cdot\frac{n}{n+a} = \frac{a}{n+a},$$

откуда

$$\frac{a}{n} > \log_e\left(1+\frac{a}{n}\right) > \frac{a}{n+a}.$$

Далее в точности, как выше, получаем:

$$a > n\log_e\left(1+\frac{a}{n}\right) = \log_e\left(1+\frac{a}{n}\right)^n,$$

$$a < (n+a)\log_e\left(1+\frac{a}{n}\right) = \log_e\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+a},$$

т. е.

$$\log_e\left(1+\frac{a}{n}\right)^n < a < \log_e\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+a}$$

или

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n < e^a < \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+a}.$$

Из последних неравенств и из того, что при $n\to\infty$ отношение $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+a} : \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^a$ стремится к 1, вытекает формула $(**)$.

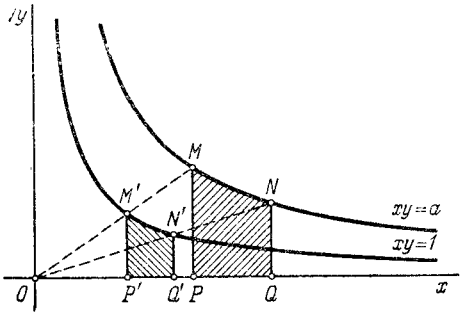
Совершенно аналогично можно доказать, что формула $(**)$ справедлива и для отрицательных a. Пусть на черт. 36 $OQ = 1-\frac{a}{n}$, где $a>0$. В таком случае $S_{QKAN} = \log_e\frac{OK}{OQ} = \log_e\frac{1}{1-\frac{a}{n}} =$

$= -\log_e\left(1-\frac{a}{n}\right)$ заключается между $S_{QKAN} = 1\cdot\frac{a}{n} = \frac{a}{n}$ и $S_{QK\bar{A}\bar{N}} =$

$= \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{n}} = \frac{a}{n-a}$. Отсюда в точности, как выше, выводится, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

Выясним в заключение, чему равна площадь трапеции $PQNM$, ограниченная произвольной гиперболой $xy = a$, осью абсцисс и прямыми $x = x_1$, $x = x_2$ (черт. 37) Произ-



Черт. 37.

ведем сжатие к началу координат (гомотетию) с коэффициентом $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ (см. выше, стр. 5). При этом гипербола $xy = a$ перейдет в гиперболу $xy = 1$ (точка с координатами (x, y) перейдет в точку с координатами $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}x, \frac{1}{\sqrt{a}}y\right)$, а кривая $xy = a$ — в кривую $xy = 1$); криволинейная трапеция $PQNM$ перейдет в криволинейную трапецию $P'Q'N'M'$. Но, как мы уже знаем,

$$S_{P'Q'N'M'} = \log_e\left(\frac{OQ'}{OP'}\right);$$

с другой стороны, в силу свойств сжатия к точке (см. стр. 5—7),

$$S_{P'Q'N'M'} = k^2 S_{PQNM} = \frac{1}{a} S_{PQNM},\ \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Отсюда получаем:

$$S_{PQNM} = a \log_e\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

В частности, если $a = \lg e \approx 0{,}43$ — десятичный логарифм числа e, то мы получаем:

$$S_{PQNM} = \lg e \cdot \log_e\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \lg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

(из равенства $z = e^{\log_e z} = (10^{\lg e})^{\log_e z} = 10^{\lg e \log_e z}$ и $z = 10^{\lg z}$ следует, что $\lg z = \lg e \cdot \log_e z$. Таким образом, десятичный логарифм числа z можно определить как площадь криволинейной трапеции $KPMA$, ограниченной гиперболой $xy = \lg e \approx 0{,}43$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$, $x = z$ («геометрическое определение десятичных логарифмов»).

§ 2. Аналитические выражения для гиперболических функций

Рассмотрим снова единичную гиперболу $X^2 - Y^2 = 1$. Пусть M есть произвольная точка этой гиперболы; угол (гиперболический) AOM равен t (черт. 38). Координаты точек M и A в системе координат, оси которой совпадают с осями гиперболы, очевидно, равны соответственно $OP = \operatorname{ch} t$; $PM = \operatorname{sh} t$ и $OA = 1$; 0. Координаты этих же точек в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами гиперболы, определяются по формулам (*) § 1 гл. II (стр. 25) и равны соответственно

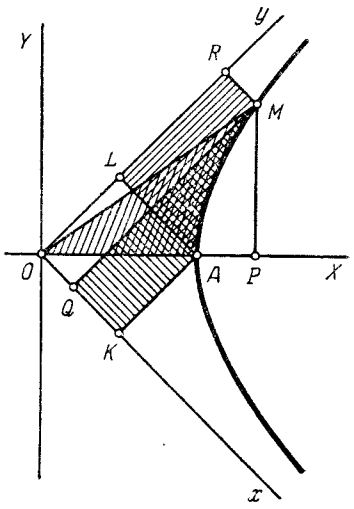
$$OQ = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OR = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и

$$OK = (1 - 0)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OL = (1 + 0)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Черт. 38.

Далее нетрудно видеть, что площади криволинейных трапеций $QKAM$ и $RLAM$ равны между собой и равны площади гиперболического сектора OAM. Действительно, по определению гиперболы (см. выше, стр. 13) площади координатных прямоугольников точек M и A равны $S_{OQMR} = S_{OKAL}$. Следовательно, $S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{OKAL} + S_{OQMR} = S_{RLAM}$. С другой стороны, $S_{\triangle MOQ} = S_{\triangle AOK}$ (ибо $S_{\triangle MOQ} = \frac{1}{2} S_{OQMR}$, $S_{\triangle AOK} = \frac{1}{2} S_{OKAL}$).

Отсюда имеем:

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{\triangle AOK} + S_{\triangle MOQ} = S_{OAM}.$$

Но так как по определению гиперболического угла $S_{OAM} = \frac{1}{2}t$, то

$$S_{QKAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2}t.$$

Так как единичная гипербола в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, имеет уравнение $xy = \frac{1}{2}$ (стр. 25), то (см. конец предыдущего параграфа)

$$S_{QKAM} = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{OK}{OQ}\right) = \frac{1}{2}\log_e \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log_e(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t),$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}\log_e(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t),$$

$$-t = \log_e(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t). \qquad (*)$$

Аналогично имеем:

$$S_{OAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{OR}{OL}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log_e \frac{(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\log_e(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t),$$

откуда

$$t = \log_e(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t). \qquad (**)$$

Формулами $(*)$ и $(**)$ устанавливается связь между гиперболическими функциями и логарифмами при основании e. Из этих формул получаем:

$$\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}, \quad \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^{t};$$

следовательно,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \qquad (2)$$

Так как $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, то имеем:

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \tag{3}$$

Это и есть аналитические выражения для гиперболических функций; ими обыкновенно и определяют гиперболические функции в курсе высшей школы. Из этих трех формул легко вывести все формулы гиперболической тригонометрии.

Так, например,

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1, \tag{I}$$

$$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch} 2t, \tag{IX}$$

$$2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} =$$

$$= \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \operatorname{sh} 2t, \tag{VIII}$$

$$\frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \dfrac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}}{1 - \left[\dfrac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}\right]^2} =$$

$$= \frac{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}) \cdot (e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2}{(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})[(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})^2 - (e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})^2]} =$$

$$= \frac{2(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}})(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})}{4} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t. \tag{XIV}$$

Аналогично можно вывести и другие формулы.

Для того чтобы получить из формул (1) — (2) дальнейшие следствия, преобразуем формулу (∗∗) предыдущего параграфа (стр. 43):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Согласно формуле бинома Ньютона имеем:

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{a}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{a^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{a^3}{n^3}+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}\frac{a^n}{n^n} = 1+\frac{a}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{a^2}{2!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{a^3}{3!}+\dots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{a^n}{n!} =$$

$$= 1+u_1+u_2+\dots+u_n,$$

где

$$u_k = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{a^k}{k!} \quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Отбросим теперь в сумме $1+u_1+u_2+\dots+u_n$ все члены $u_{k+1},\ u_{k+2},\ \dots,\ u_n$ после некоторого члена u_k. Сделанная при этом ошибка будет равна

$$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\dots+u_n.$$

Но из определения величин u_n следует:

$$|u_k| \leqslant \frac{|a|^k}{k!},$$

$$|u_{k+1}| = \left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{|a|}{k+1}|u_k| < \frac{|a|}{k+1}|u_k|,$$

$$|u_{k+2}| = \left(1-\frac{k+1}{n}\right)\frac{|a|}{k+2}|u_{k+1}| < \frac{|a|}{k+1}|u_{k+1}| < \frac{|a|^2}{(k+1)^2}|u_k|,$$

$$|u_{k+3}| = \left(1-\frac{k+2}{n}\right)\frac{|a|}{k+3}|u_{k+2}| < \frac{|a|}{k+1}|u_{k+2}| < \frac{|a|^3}{(k+1)^3}|u_k|,$$

. . . . . .

. . . . . .

(вертикальные черточки $|\ |$ — знак абсолютной величины числа). Поэтому сумма $u_{k+1}+u_{k+2}+\dots+u_n$ по абсолютной величине не превосходит выражения

$$|u_k|\frac{|a|}{k+1}+|u_k|\frac{|a|^2}{(k+1)^2}+|u_k|\frac{|a|^3}{(k+1)^3}+\dots+|u_k|\frac{|a|^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} =$$

$$= |u_k|\frac{\frac{|a|}{k+1}-\frac{|a|^{n-k+1}}{(k+1)^{n-k+1}}}{1-\frac{|a|}{k+1}}.$$

Предположим теперь, что $k+1>|a|$ (мы считаем, что n достаточно велико, чтобы можно было выбрать k таким образом). В таком случае последнее выражение меньше, чем

$$|u_k|\frac{\frac{|a|}{k+1}}{1-\frac{|a|}{k+1}}=|u_k|\frac{|a|}{k+1-|a|}\leqslant\frac{|a|^k}{k!}\frac{|a|}{k+1-|a|}$$

$\left(\text{ибо } u_k\leqslant\frac{|a|^k}{k!}\right)$.

Таким образом, заменив $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ суммой $1+u_1+u_2+\ldots+u_k$, мы сделаем ошибку по абсолютной величине, не превосходящую $\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}$, т. е. при любом n, большем k

$$\left|\left(1+\frac{a}{n}\right)^n-(1+u_1+u_2+\cdots+u_k)\right|<\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}.$$

Перейдем теперь в последнем выражении к пределу $n\to\infty$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

(формула $(**)$, стр. 43) и

$$u_1=\frac{a}{1},\quad\lim_{n\to\infty}u_2=\frac{a^2}{2!},\quad\lim_{n\to\infty}u_3=\frac{a^3}{3!},\quad\ldots,\quad\lim_{n\to\infty}u_k=\frac{a^k}{k!}$$

(см. формулу, определяющую величину u_k), то получим:

$$\left|e^a-\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^k}{k!}\right)\right|<\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}.$$

Перейдем теперь в этом выражении к пределу при $k\to\infty$. Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}=0.$$

Обозначим

$$\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}=V_k.$$

В таком случае

$$V_{k+l}=\frac{|a|^{k+l+1}}{(k+l)!\,(k+l+1-|a|)}=\frac{|a|^{k+1}}{k!\,(k+1-|a|)}\times$$
$$\times\frac{k+1-|a|}{k+l+1-|a|}\cdot\frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\ldots(k+l)}<V_k\cdot\frac{|a|^l}{(k+1)^l}$$

(множитель $\frac{k+1-|a|}{k+l+1-|a|}$, меньший единицы, мы просто отбросили, а в множителе $\frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}$ заменили все множители знаменателя на $k+1$). Но мы уже предполагали, что $k+1>|a|$; таким образом, отношение $\frac{|a|}{k+1}=\alpha$ меньше 1. Из того, что

$$V_{k+l}<V_k\alpha^l, \qquad \alpha<1$$

следует, что $V_{k+l}\to 0$ при $l\to\infty$, или

$$\lim_{k\to\infty} V_k = 0.$$

Окончательно формула

$$\left|\left(1+\frac{a}{n}\right)^n-\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\dots+\frac{a^k}{k!}\right)\right|<V_k$$

дает:

$$\lim_{k\to\infty}\left|e^a-\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\dots+\frac{a^k}{k!}\right)\right|=0,$$

или

$$e^a=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\dots+\frac{a^k}{k!}\right).$$

Итак, e^a равно сумме бесконечного ряда

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\dots \qquad (***)$$

Это и есть та формула, которую мы хотели получить.

Подставив в формулу $(***)$ $a=t$ и $a=-t$, имеем:

$$e^t=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\dots,$$

$$e^{-t}=1-\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\dots$$

Учитывая теперь формулы (1) и (2), получим:

$$\operatorname{ch} t=1+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^6}{6!}+\dots, \qquad (4)$$

$$\operatorname{sh} t=\frac{t}{1}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\dots \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) позволяют вычислить значения $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ (а следовательно, и $\operatorname{th} t=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$) для каждого фиксированного t с любой степенью точности; для этого следует взять достаточно много членов соответствующих бесконечных рядов. В частности, с помощью этих формул составляются таблицы гиперболических функций.

§ 3. Формулы Эйлера

В школьном курсе алгебры определяется вещественная степень числа; выражения типа 2^i или e^{2-4i} пока для нас никак не определены и поэтому должны считаться бессмысленными. Определим теперь любую комплексную степень a числа e формулой $(**)$, стр. 43:

$$e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n. \qquad (**)$$

Для того чтобы вычислить этот предел, воспользуемся формулой Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Если $a=\beta+i\alpha$, β, α — действительны, то

$$1+\frac{a}{n}=\left(1+\frac{\beta}{n}\right)+i\frac{\alpha}{n}=r_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n),$$

где

$$r_n=\sqrt{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}},\ \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{\beta}{n}}$$

(черт. 39). Отсюда получаем:

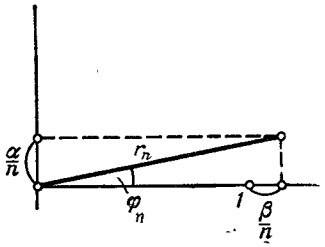
$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=r_n^n(\cos n\varphi_n+i\sin n\varphi_n),$$

и, следовательно,

$$e^a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=$$
$$=R(\cos\Phi+i\sin\Phi),$$

где

$$R=\lim_{n\to\infty}(r_n)^n,\quad \Phi=\lim_{n\to\infty}(n\varphi_n).$$



Черт. 39.

Определим теперь R и Φ. Имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}}\right)^n.$$

Сравним это выражение с

$$e^\beta=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2}\right)^n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}\right)^n$$

(см. формулу (∗∗)). Имеем:

$$\frac{R}{e^{\beta}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{n^2}}\right)^n}{\left(\sqrt{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n.$$

Но при $\beta \geqslant 0$ и достаточно больших n имеем:

$$1 \leqslant \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

и, следовательно,

$$\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n \geqslant \left(\sqrt{1+\frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n =$$

$$= \left(\sqrt{1+\frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2}}\right)^n > \left(\sqrt{1+\frac{4\alpha^2}{9n^2}}\right)^n, \qquad \text{(a)}$$

и нам остается только оценить выражения

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4\alpha^2}{9n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4\alpha^2}{9n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Воспользуемся теперь тем, что при больших n в силу формулы (∗∗)

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2} \approx e^{\alpha^2} \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{4\alpha^2}{9n^2}\right)^{n^2} \approx e^{\frac{4\alpha^2}{9}}.$$

А так как [1])

$$\lim_{n\to\infty}(e^{\alpha^2})^{\frac{1}{2n}}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}(e^{\frac{4\alpha^2}{9}})^{\frac{1}{2n}}=1,$$

то оба интересующих нас предела должны быть равны 1.

В случае $\beta<0$ и достаточно больших n

$$1\geqslant\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2>\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

и в формуле, аналогичной формуле (а), знаки неравенств надо заменить на противоположные. Дальнейшее доказательство остается прежним.

Таким образом, при любом β

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1+\frac{2\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n=1$$

и, значит,

$$\frac{R}{e^{\beta}}=1, \quad R=e^{\beta}.$$

Перейдем теперь к определению Ф. Имеем:

$$\Phi=\lim_{n\to\infty}(n\varphi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg}\varphi_n}\cdot n\operatorname{tg}\varphi_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg}\varphi_n}\cdot\frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{n}}\right).$$

Но $\varphi_n\to 0$ при $n\to\infty$ $\left(\text{ибо при этом } \operatorname{tg}\varphi_n=\frac{\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{\beta}{n}}\to 0\right)$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg}\varphi_n}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi=1,$$

ибо

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi=1.$$

---

[1]) Это вытекает, например, из того, что для каждого числа a

$$\lim_{n\to\infty}[\log a^{\frac{1}{2n}}]=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a}{2n}\to 0;$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{2n}}=1.$$

А так как, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{n}}=\alpha,$$

то

$$\Phi=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg}\varphi_n}\cdot\frac{\alpha}{1+\frac{\beta}{n}}\right)=\alpha.$$

Итак, $R=e^{\beta}$, $\Phi=\alpha$ и, следовательно,

$$e^{\beta+i\alpha}=e^{\beta}(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Теперь мы можем убедиться, что наше определение комплексной степени e^{a} числа e является удачным. Действительно, это определение удовлетворяет двум основным требованиям, которые можно было бы заранее предъявить ему:

1°. При a действительном это определение совпадает с обычным (ибо для действительных a формула $(**)$ была доказана нами выше).

2°. Так определенные комплексные степени удовлетворяют основному правилу действий над степенями числа

$$e^{a_1}\cdot e^{a_2}=e^{a_1+a_2}.$$

В самом деле, если $a_1=\beta_1+i\alpha_1$, $a_2=\beta_2+i\alpha_2$, то имеем:

$$e^{a_1}\cdot e^{a_2}=e^{\beta_1+i\alpha_1}\cdot e^{\beta_2+i\alpha_2}=e^{\beta_1}(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)\cdot e^{\beta_2}(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=$$
$$=e^{\beta_1}\cdot e^{\beta_2}\cdot(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)=$$
$$=e^{\beta_1+\beta_2}[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)]=e^{\beta_1+\beta_2+i(\alpha_1+\alpha_2)}=e^{a_1+a_2}.$$

Подставим в полученное выражение для e^{a} значения $a=i\alpha$ и $a=-i\alpha$. Мы будем иметь:

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha,$$
$$e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha.$$

Из этих двух формул немедленно вытекает

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\qquad(1')$$

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},\qquad(2')$$

и следовательно, так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}.\qquad(3')$$

Это и есть формулы Эйлера[1]), устанавливающие связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

[1]) Леонард Эйлер (1707–1783)—крупнейший математик XVIII века, член Российской Академии наук, жил и работал в Петербурге.

Из формул (1) и (2) можно получить дальнейшие следствия. Действительно, подставим в формулу (***) (стр. 50) значения $a = i\alpha$ и $a = -i\alpha$[1]). Мы будем иметь:

$$e^{i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \dots,$$

$$e^{-i\alpha} = 1 - \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

Учитывая формулы (1′) и (2′), получим отсюда:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots, \qquad (4')$$

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \qquad (5')$$

Формулы (4′) — (5′) позволяют вычислять значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (а следовательно, и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$) для каждого фиксированного α с любой степенью точности: для этого надо взять достаточно много членов соответствующих бесконечных рядов. В частности, с помощью этих формул составляются таблицы тригонометрических функций.

---

[1]) Вывод формулы (***) из формулы (**) (см. выше, стр. 49—50) полностью сохраняет силу и для комплексных значений a (только здесь следует считать, что вертикальные черточки означают абсолютную величину или модуль комплексного числа, т. е. корень квадратный из суммы квадратов действительной части числа и коэффициента при мнимой части).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I. **Гиперболический поворот** 5

§ 1. Сжатие к прямой 5
§ 2. Гиперболический поворот 12
§ 3. Несколько свойств гиперболы 16

Глава II. **Гиперболические фуикции** 24

§ 1. Уравнение гиперболы, отнесенной к осям 24
§ 2. Определение и основные свойства гиперболических функций 26
§ 3. Формулы сложения 30

Глава III. **Связь с логарифмами** 37

§ 1. Геометрическая теория логарифмов 37
§ 2. Аналитические выражения для гиперболических фуикций 45
§ 3. Формулы Эйлера 51

Цена 80 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.

Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.

Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.

Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.

Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.

Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.

Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.

Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.

Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.

Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.

Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.

Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.

Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.

Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.

Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.

Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.